# Courbes du plan

$\mathcal{P}$ désigne un plan rapporté à un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O;\vec{i},\vec{j})$.
On note $P$ l'ensemble formé des vecteurs du plan $\mathcal{P}$. $I$ désigne un intervalle non singulier de $\mathbb{R}$.

## I. Fonctions à valeurs vectorielles

### 1°) Définition

*Déf :* On appelle fonction vectorielle du plan $\mathcal{P}$ définie sur $I$ toute application $\vec{f} : \begin{cases} I \to P \\ t \mapsto \vec{f}(t) \end{cases}$.

Pour tout $t \in I$, introduisons $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées du vecteur $\vec{f}(t)$.

*Déf :* Les fonctions réelles $x, y : I \to \mathbb{R}$ sont appelées fonctions composantes (ou coordonnées) de $\vec{f}$.

### 2°) Limite d'une fonction vectorielle

Soit $\vec{f} : I \to P$ de fonctions composantes $x$ et $y$.
Soit $a$ un point de $I$ ou une extrémité éventuellement infinie de $I$

*Déf :* On dit que $\vec{f}$ tend vers $\vec{\ell} \in P$ en $a$ ssi $\left\|\vec{f}(t) - \vec{\ell}\right\| \xrightarrow[t \to a]{} 0$. Le vecteur $\vec{\ell}$ est alors unique, on l'appelle limite de $\vec{f}$ en $a$. On note alors $\vec{f}(t) \xrightarrow[t \to a]{} \vec{\ell}$ ou $\vec{\ell} = \lim\limits_{t \to a} \vec{f}(t)$.

*Prop :* Soit $\vec{\ell}$ de coordonnées $x_0, y_0$.

$$\vec{f}(t) \xrightarrow[t \to a]{} \vec{\ell} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) \xrightarrow[t \to a]{} x_0 \\ y(t) \xrightarrow[t \to a]{} y_0 \end{cases}.$$

### 3°) Continuité et dérivation

A l'aide de cette notion de limite, on définit, comme pour les fonctions numériques, les notions de continuité, de dérivabilité, de classe... On obtient :

*Prop :* Une fonction $\vec{f} : I \to P$ est continue ssi ses deux fonctions composantes $x$ et $y$ le sont.

*Prop :* Une fonction $\vec{f} : I \to P$ est dérivable ssi ses deux fonctions composantes $x$ et $y$ le sont.

De plus, son vecteur dérivé, noté $\vec{f}'(t)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t}(t)$ est donné a pour coordonnées $x'(t)$ et $y'(t)$.

*Prop :* Une fonction $\vec{f} : I \to P$ est de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) ssi ses deux fonctions composantes $x$ et $y$ le sont. De plus, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $\ell \leq k$, on a alors

$\dfrac{\mathrm{d}^k \vec{f}}{\mathrm{d}t^k} = x^{(k)}.\vec{i} + y^{(k)}.\vec{j}$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}^k \vec{f}}{\mathrm{d}t^t}(t) \begin{vmatrix} x^{(k)}(t) \\ y^{(k)}(t) \end{vmatrix}$.

### 4°) Formules de dérivation

Soit $\vec{f}, \vec{g} : I \to P$ deux fonctions vectorielles dérivables.

*Prop :* Si $\vec{f}, \vec{g} : I \to P$ sont dérivables alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. $t \mapsto \lambda\vec{f}(t) + \mu\vec{g}(t)$ est dérivable et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda\vec{f}(t) + \mu\vec{g}(t)) = \lambda\frac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t}(t) + \mu\frac{\mathrm{d}\vec{g}}{\mathrm{d}t}(t).$$

*Prop :* Si $\vec{f} : I \to P$ et $\alpha : I \to \mathbb{R}$ sont dérivables alors $t \to \alpha(t)\vec{f}(t)$ l'est aussi et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha(t).\vec{f}(t)) = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}(t).\vec{f}(t) + \alpha(t).\frac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t}(t).$$

*Prop :* Si $\vec{f} : I \to P$ et $u \mapsto \varphi(u)$ dont dérivable alors $u \mapsto \vec{f}(\varphi(u))$ est dérivable et

$$\frac{\mathrm{d}\vec{f}(\varphi(u))}{\mathrm{d}u} = \varphi'(u)\frac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t}(\varphi(u)) .$$

*Prop :* Si $\vec{f}, \vec{g} : I \to P$ sont dérivables alors $t \mapsto \vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)$ est dérivable et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{f}(t) \cdot \vec{g}(t)) = \frac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t}(t) \cdot \vec{g}(t) + \vec{f}(t) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{g}}{\mathrm{d}t}(t) .$$

*Prop :* Si $\vec{f}, \vec{g} : I \to P$ sont dérivables alors $t \mapsto \mathrm{Det}(\vec{f}(t), \vec{g}(t))$ est dérivable et :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\mathrm{Det}(\vec{f}(t), \vec{g}(t))\Big) = \mathrm{Det}(\frac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t}(t), \vec{g}(t)) + \mathrm{Det}(\vec{f}(t), \frac{\mathrm{d}\vec{g}}{\mathrm{d}t}(t)) .$$

*Prop :* Si $\forall t \in I, \vec{f}(t) \neq \vec{o}$ alors $t \mapsto \left\|\vec{f}(t)\right\|$ est dérivable et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\vec{f}(t)\right\| = \frac{\frac{\mathrm{d}\vec{f}}{\mathrm{d}t}(t) \cdot \vec{f}(t)}{\left\|\vec{f}(t)\right\|}$.

## II. Courbes paramétrées

### 1°) Arc paramétré

*Déf :* On appelle arc paramétré du plan $\mathcal{P}$ tout couple $\Gamma = (I, M)$ formé d'un intervalle non singulier $I$ et d'une fonction $M : I \to \mathcal{P}$ (fonction ponctuelle). Pour tout $t \in I$, le point $M(t)$ est appelé point (courant) de paramètre $t$ de l'arc $\Gamma$.
L'ensemble $\mathrm{Supp}\,\Gamma = \{M(t) / t \in I\}$ est appelé support (ou courbe représentative) de l'arc $\Gamma$.
L'arc $\Gamma$ est dit de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) ssi $t \mapsto \overrightarrow{OM(t)}$ l'est.

*Déf :* Soit $a < b \in \mathbb{R}$ et $\Gamma = ([a,b], M)$ un arc paramétré.
On appelle extrémités de l'arc $\Gamma$ les points $A = M(a)$ et $B = M(b)$.
Le support de $\Gamma$ est alors parfois noté $\overset{\frown}{AB}$.
Si $A = B$, on dit que l'arc $\Gamma$ est fermé.

*Déf :* Soit $\Gamma = (I, M)$ un arc paramétré et $N$ un point du plan.
On appelle multiplicité du point $N$ dans l'arc $\Gamma$ le nombre $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ de paramètres $t \in I$ tels que $P = M(t)$.
Si $m = 0$ alors $N \notin \mathrm{Supp}\,\Gamma$.
Si $m = 1$ alors le point $N$ est dit simple.
Si $m \geq 2$ alors le point $N$ est dit multiple (double, triple,...)

### 2°) Modes de définition d'une courbe paramétrée

#### a) paramétrage cartésien

*Déf :* Soit $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ deux fonctions réelles définies sur $I$.
On appelle arc défini en coordonnées cartésiennes par $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ avec $t \in I$, l'arc $\Gamma = (I, M)$ avec $\overrightarrow{OM(t)} = x(t).\vec{i} + y(t).\vec{j}$
de sorte que $M(t)$ ait pour coordonnées cartésiennes $x(t)$ et $y(t)$.

*Prop :* Si $t \mapsto x(t), y(t)$ sont des fonctions $\mathcal{C}^k$ alors $\Gamma$ est $\mathcal{C}^k$.

#### b) paramétrage polaire

On introduit $\vec{u}_\theta = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$ et $\vec{v}_\theta = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$.

*Déf :* Soit $t \mapsto \rho(t)$ et $t \mapsto \theta(t)$ deux fonctions réelles définies sur $I$.

On appelle arc défini en coordonnées polaires par $\begin{cases}\rho = \rho(t) \\ \theta = \theta(t)\end{cases}$ avec $t \in I$, l'arc $\Gamma = (I, M)$ avec $\overrightarrow{OM}(t) = \rho(t)\vec{u}_{\theta(t)}$ de sorte $(\rho(t), \theta(t))$ soit un système de coordonnées polaires de $M(t)$.

*Prop :* Si $t \mapsto \rho(t), \theta(t)$ sont des fonctions $\mathcal{C}^k$ alors $\Gamma$ est aussi $\mathcal{C}^k$.

**c) courbe définie par une équation polaire**

*Déf :* Soit $\theta \mapsto \rho(\theta)$ une fonction réelle définie sur $I$. On appelle arc défini par l'équation polaire $\rho = \rho(\theta)$ l'arc $\Gamma = (I, M)$ avec $M(\theta)$ déterminé par $\overrightarrow{OM(\theta)} = \rho(\theta)\vec{u}_\theta$ de sorte que $(\rho(\theta), \theta)$ soit un système de coordonnées polaires du point $M(\theta)$.

*Prop :* Si $\theta \mapsto \rho(\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ alors l'arc $\Gamma$ est lui aussi de classe $\mathcal{C}^k$.

### 3°) Vocabulaire cinématique

Soit $\Gamma = (I, M)$ un arc $\mathcal{C}^k$ avec $k \geq 2$.

*Déf :* L'application $t \mapsto M(t)$ est appelée mouvement du point $M$.
Le support de l'arc $\Gamma$ est appelé trajectoire du point $M$.

*Déf :* $\vec{v}(t) = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}OM}}{\mathrm{d}t}(t)$ : vecteur vitesse au point $M(t)$,

$v(t) = \left\|\vec{v}(t)\right\|$ : appelé vitesse au point $M(t)$. figure

*Déf :* $\vec{a}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}(t) = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2OM}}{\mathrm{d}t^2}(t)$ : vecteur accélération au point $M(t)$,

$a(t) = \left\|\vec{a}(t)\right\|$ : accélération au point $M(t)$. figure

*Déf :* Le mouvement $t \mapsto M(t)$ est dit uniforme (resp. accéléré, décéléré) ssi celui-ci a lieu à vitesse constante (resp. croissante, décroissante)

*Prop :* Le mouvement $t \mapsto M(t)$ est uniforme (resp. accéléré, décéléré) ssi $\forall t \in I, \vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = 0$ (resp. $\geq 0, \leq 0$)

*Déf :* Le mouvement est dit rectiligne (resp. circulaire, parabolique...) ssi sa trajectoire est incluse dans une droite (resp. un cercle, une parabole,...)

### 4°) Tangente en un point

Soit $\Gamma = (I, M)$ un arc $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geq 1$) et $t_0 \in I$. On désire étudier l'existence d'une tangente en $M_0 = M(t_0)$.

*Déf :* On dit que l'arc $\Gamma$ admet une tangente en $M_0 = M(t_0)$ ssi la droite $(M_0M(t))$ admet une position limite quand $t \to t_0$.
Cette droite limite est alors appelée tangente à $\Gamma$ en $t_0$.

*Déf :* On dit que le point $M_0 = M(t_0)$ est régulier ssi $\vec{v}(t_0) \neq \vec{o}$. Sinon on dit que ce point est singulier (ou stationnaire). On dit que l'arc $\Gamma$ est régulier ssi tous ses points le sont.

*Théorème :*
Si $M_0 = M(t_0)$ est régulier alors $\Gamma$ admet une tangente en $M_0$, c'est la droite passant par $M_0$ et dirigée par $\vec{v}(t_0)$.

### 5°) Concavité de la courbe

Soit $\Gamma = (I, M)$ un arc $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geq 2$) et $t_0 \in I$ de sorte que $M_0 = M(t_0)$ soit régulier. La droite $T = (M_0; \vec{v}(t_0))$ est tangente à $\Gamma$ en $M_0$.
On désire préciser l'allure de l'arc au voisinage de cette tangente.

*Déf :* On dit que le point $M_0 = M(t_0)$ est birégulier ssi $\vec{v}(t_0)$ et $\vec{a}(t_0)$ ne sont pas colinéaires i.e. $\text{Det}(\vec{v}(t_0), \vec{a}(t_0)) \neq 0$.
On dit que l'arc $\Gamma$ est birégulier ssi tous ses points le sont.

*Théorème :*
Si $M_0 = M(t_0)$ est birégulier alors $\Gamma$ se trouve, au voisinage de $t_0$, dans le demi-plan délimité par la tangente $T$ et pointé par le vecteur $\vec{a}(t_0)$.

Dans les deux cas $f(t)$ à le signe de $\text{Det}(\vec{v}(t_0), \vec{a}(t_0))$ au voisinage de $t_0$.

*Déf :* Si $\text{Det}(\vec{v}(t_0), \vec{a}(t_0)) > 0$ alors dit que $\Gamma$ tourne à gauche en $t_0$ (ou à sa concavité tournée à gauche)
Si $\text{Det}(\vec{v}(t_0), \vec{a}(t_0)) < 0$ alors dit que $\Gamma$ tourne à droite en $t_0$.
Si $\text{Det}(\vec{v}(t), \vec{a}(t))$ s'annule en changeant de signe en $t_0$, on dit que $\Gamma$ présente un point d'inflexion en $M(t_0)$ (point régulier).

### 6°) Branches infinies

Soit $\Gamma = (I, M)$ un arc paramétré et $a$ une extrémité ouverte de l'intervalle $I$ éventuellement infinie. On désire étudier le comportement du point $M(t)$ en $a$.

*Déf :* S'il existe un point $L$ tel que $\overrightarrow{OM(t)} \to \overrightarrow{OL}$ quand $t \to a$ alors on dit que $L$ est un point limite de $\Gamma$ en $a$.

*Déf :* Si $OM(t) \xrightarrow[t \to a]{} +\infty$, on dit que $\Gamma$ présente une branche infinie en $a$.

*Déf :* Supposons que $\Gamma$ ait une branche infinie en $a$. Si la droite $(OM(t))$ admet une position limite quand $t \to a$ alors cette droite limite $D$ est appelée direction asymptotique de l'arc $\Gamma$ en $a$.

*Déf :* Supposons que $\Gamma$ admette une direction asymptotique en $a$.
Si $d(M(t), D) \xrightarrow[t \to a]{} +\infty$ alors on dit que $\Gamma$ présente une branche parabolique de direction $D$.
S'il existe $\Delta$ parallèle à $D$ telle que $d(M(t), \Delta) \xrightarrow[t \to a]{} 0$ alors on dit que la droite $\Delta$ est asymptote à $\Gamma$ en $a$.

## III. Courbes en coordonnées cartésiennes

Soit $t \mapsto x(t)$ et $t \to y(t)$ des fonctions réelles définies sur $I$ classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geq 2$)

Soit $\Gamma = (I, M)$ l'arc paramétré défini par $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$.

### 1°) Réduction du domaine d'étude

#### a) réduction par périodicité

Supposons, ici, $I = \mathbb{R}$. S'il existe $T > 0$ tel que les fonctions $x$ et $y$ soient simultanément $T$ périodiques alors $\forall t \in \mathbb{R}, M(t+T) = M(t)$. Par suite, en représentant les points $M(t)$ pour $t$ variant dans un intervalle d'amplitude $T$, on obtient l'intégralité du support de $\Gamma$.

#### b) réduction par parité

Supposons $I$ symétrique par rapport à $t_0$.

Si $\forall t \in I, \begin{cases} x(2t_0 - t) = \pm x(t) \\ y(2t_0 - t) = \pm y(t) \end{cases}$ alors $\begin{cases} x(t_0 + h) = \pm x(t_0 - h) \\ y(t_0 + h) = \pm y(t_0 - h) \end{cases}$ et donc les points $M(t_0 + h)$ et $M(t_0 - h)$ sont, en fonction de la détermination des $\pm$ :

- confondus ($+$ et $+$),
- symétriques par rapport à $(Ox)$ ($+$ et $-$),
- symétriques par rapport à $(Oy)$ ($-$ et $+$),
- symétriques par rapport à $O$ ($-$ et $-$).

Dans tous les cas, on peut réduire l'étude à $I \cap [t_0, +\infty[$ ou $I \cap ]-\infty, t_0]$ et obtenir l'intégralité du support de $\Gamma$ en appliquant la symétrie adéquate.

### 2°) Tangente

*Prop :* Soit $t_0 \in I$ . Si $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0,0)$ alors $M(t_0)$ est un point régulier de l'arc $\Gamma$ . La tangente en ce point a pour équation $-y'(t_0)(x - x(t_0)) + x'(t_0)(y - y(t_0)) = 0$ ,

elle a pour pente $m(t_0) = \dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

### 3°) Concavité

*Prop :* Si $x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0) > 0$ alors la courbe tourne à gauche en $t_0 \in I$ .

Si $x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0) > 0$ alors la courbe tourne à droite en $t_0 \in I$ .

Si $x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)$ s'annule en changeant de signe en $t_0 \in I$ alors la courbe présente un point d'inflexion en $t_0$

### 4°) Branches infinies

Soit $a$ une extrémité ouverte (éventuellement infinie) de $I$ .

*Prop :* Si $x(t) \to x_0$ et $y(t) \to y_0$ quand $t \to a$ alors $L\begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ est point limite en $a$ .

*Prop :* Si $x(t) \underset{t \to a}{\to} \pm\infty$ ou $y(t) \underset{t \to a}{\to} \pm\infty$ de sorte que $\Gamma$ présente une branche infinie en $a$ .

*Prop :* Si $\Gamma$ présente une branche infinie en $a$ et que $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \to a]{} \alpha \in \mathbb{R}$ alors la droite $D : y = \alpha x$ est direction asymptotique à $\Gamma$ en $a$ .

Si de plus, $y(t) - \alpha x(t) \to +\infty$ ou $-\infty$ alors $\Gamma$ présente une branche parabolique de direction $D$ en $a$ .

Si en revanche, $y(t) - \alpha x(t) \to \beta \in \mathbb{R}$ alors $\Delta : y = \alpha x + \beta$ est asymptote à $\Gamma$ en $a$ .

*Prop :* Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \to \pm\infty$ alors $\Gamma$ présente une branche infinie de direction $D : x = 0$ en $a$ .

Si $x(t) \to +\infty$ ou $-\infty$ alors $\Gamma$ présente une branche parabolique de direction $D$ .

Si $x(t) \to x_0$ alors $\Delta : x = x_0$ est asymptote $\Gamma$ en $a$ .

### 5°) Schéma d'étude

Pour étudier une courbe paramétrée définie par $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ :

- on précise l'intervalle (ou les intervalles) de définition et la classe des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ ,
- on recherche d'éventuelles symétries et/ou périodicité afin de réduire le domaine d'étude,
- on calculer $x'(t)$ et $y'(t)$ et on détermine les valeurs d'annulation,
- on dresse le tableau des variations simultanées de $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ en y ajoutant l'étude du signe $m(t) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ qui donne la pente de la tangente au point $M(t)$ lorsque celui-ci est régulier,
- on étudie les éventuels points singuliers avec allure,
- on étudie les éventuelles branches infinies avec allure,
- on réalise le tracé final en commençant éventuellement par une ébauche et en ayant si besoin étudié d'autres points et, si demandé, les inflexions.

## IV. Courbes en coordonnées polaires

Soit $\theta \mapsto \rho(\theta)$ une fonction réelle définie sur $I$ et $\Gamma = (I, M)$ l'arc défini par l'équation polaire $\rho = \rho(\theta)$ i.e. l'arc de point courant $M(\theta)$ avec $\overrightarrow{OM(\theta)} = \rho(\theta)\vec{u}_\theta$ .

## 1°) Tangente et allure en un point

### a) étude au point O

Soit $\theta_0 \in I$ tel que $\rho(\theta_0) = 0$ de sorte que $M(\theta_0) = O$.

Pour étudier ce point, on dresse le tableau de signe de $\rho(\theta)$ au voisinage de $\theta_0$.

Supposons que l'on se trouve dans l'un des 4 cas usuels suivants :

Cas 1 :

| $\theta$ | | $\theta_0$ | |
|---|---|---|---|
| $\rho(\theta)$ | $+$ | $0$ | $-$ |

Cas 2 :

| $\theta$ | | $\theta_0$ | |
|---|---|---|---|
| $\rho(\theta)$ | $-$ | $0$ | $+$ |

Cas 3 :

| $\theta$ | | $\theta_0$ | |
|---|---|---|---|
| $\rho(\theta)$ | $+$ | $0$ | $+$ |

Cas 4 :

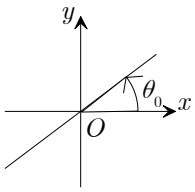
| $\theta$ | | $\theta_0$ | |
|---|---|---|---|
| $\rho(\theta)$ | $-$ | $0$ | $-$ |

Etudions l'existence d'une tangente en $M(\theta_0)$.

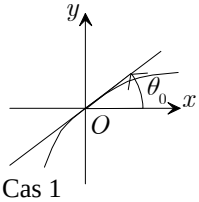
La droite $(M(\theta_0)M(\theta))$ est dirigée par $\vec{u}_\theta$ et

$\vec{u}_\theta \xrightarrow[\theta \to \theta_0]{} \vec{u}_{\theta_0}$ donc l'arc admet une tangente $T$

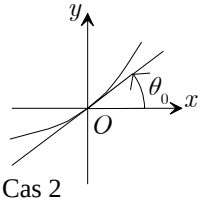
en $M(\theta_0) = O$ c'est la droite d'équation polaire $\theta = \theta_0$.



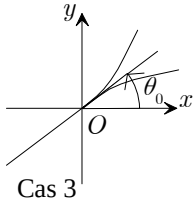

L'allure de $\Gamma$ autour du point $O$ est alors



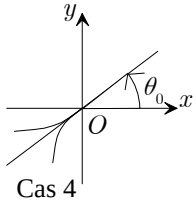
Cas 1



Cas 2



Cas 3



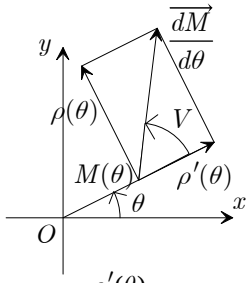
Cas 4

### b) étude en un point différent de O

Soit $\theta \in I$ tel que $\rho(\theta) \neq 0$ de sorte que $M(\theta) \neq O$.

$\overrightarrow{OM}(\theta) = \rho(\theta)\vec{u}_\theta, \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}(\theta) = \rho'(\theta)\vec{u}_\theta + \rho(\theta)\vec{v}_\theta \neq \vec{o}$ puisque $\rho(\theta) \neq 0$.

Le point $M(\theta)$ est régulier et admet donc une tangente dirigée par $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}(\theta)$.




Pour repérer cette tangente, on introduit $V = (\vec{u}_\theta, \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}(\theta))$ $[2\pi]$. La relation $\cot V = \dfrac{\rho'(\theta)}{\rho(\theta)}$ détermine $V$ à $\pi$ près puis permet de positionner $T$.

$\overrightarrow{OM}(\theta) = \rho(\theta)\vec{u}_\theta$, $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}(\theta) = \rho'(\theta)\vec{u}_\theta + \rho(\theta)\vec{v}_\theta \neq 0$, $\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta) = (\rho''(\theta) - \rho(\theta))\vec{u}_\theta + 2\rho'(\theta)\vec{v}_\theta$.

$\mathrm{Det}\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}(\theta), \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta)\right) = (\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')(\theta)$.

Si $(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')(\theta) \neq 0$ alors $M(\theta)$ est birégulier

Si $(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')(\theta) > 0$ alors la courbe tourne à gauche et donc sa concavité est tournée vers $O$.

Si $(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')(\theta) < 0$ alors la courbe tourne à droite et sa concavité est tournée vers l'extérieur.

Si $(\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'')(\theta)$ s'annule en changeant de signe, il y a un point d'inflexion.

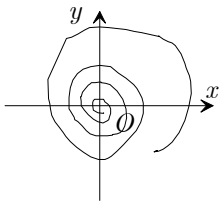
## 2°) Etude des branches infinies

Soit $\theta_0$ une extrémité ouverte de $I$.

**a) cas** $\theta_0 = +\infty$

Si $\lim\limits_{\theta \to +\infty} \rho(\theta) = 0^+ / 0^-$, on dit que

l'arc $\Gamma$ s'enroule autour de $O$ en l'infini.

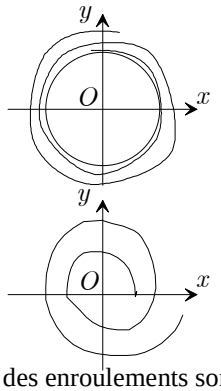


$\lim\limits_{\theta\to+\infty}\rho(\theta)=0^+$ et $\lim\limits_{\theta\to+\infty}\rho(\theta)=0^-$

Si $\lim\limits_{\theta\to+\infty}\rho(\theta)=R\neq 0$, on dit que le cercle de centre $O$ et de rayon $|R|$ est asymptote à l'arc $\Gamma$ en l'infini.

pour $R>0$, $\lim\limits_{\theta\to+\infty}\rho(\theta)=R^+$.

Si $\lim\limits_{\theta\to+\infty}\rho(\theta)=+\infty/-\infty$, on dit que l'arc $\Gamma$ présente une branche spirale en l'infini.




**b) cas** $\theta_0=-\infty$

On retrouve la même discussion mais cette fois-ci les flèches des enroulements sont inversés.

**c) cas d'une extrémité finie**

On passe en coordonnées cartésiennes via $\begin{cases}x(\theta)=\rho(\theta)\cos\theta\\ y(\theta)=\rho(\theta)\sin\theta\end{cases}$.

### 3°) Réduction du domaine d'étude

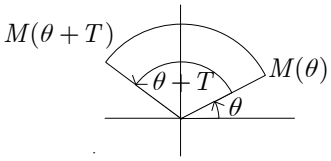
**a) périodicité**

On suppose ici $I=\mathbb{R}$.

Supposons que $\rho$ soit $T$ périodique.

$\overrightarrow{OM(\theta+T)}=\rho(\theta+T)\vec{u}_{\theta+T}=\rho(\theta)\vec{u}_{\theta+T}$ et

$\overrightarrow{OM(\theta)}=\rho(\theta)\vec{u}_{\theta}$.




Le point $M(\theta+T)$ est l'image du point $M(\theta)$ par la rotation de centre $O$ et d'angle $T$. On peut alors limiter l'étude de l'arc $\Gamma$ à un intervalle de longueur $T$. On complète ensuite la représentation obtenue en lui appliquant les rotations de centre $O$ et d'angles $T,2T,3T,...,-T,-2T,...$ i.e. $kT$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

*En particulier :*

Si $T=2\pi$ alors la courbe n'a pas besoin d'être complétée

En fait : $\theta\mapsto M(\theta)$ est dans ce cas $2\pi$ périodique.

Si $T=2k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$) : idem

Si $T=\pi$ alors on complète la courbe en lui appliquant seulement la symétrie de centre $O$.

Si $T=\dfrac{2\pi k}{n}$ ($k,n\in\mathbb{N}^*$) alors on complète la courbe en lui appliquant seulement les rotations de centre $O$ et d'angles $T,2T,...,(n-1)T$.

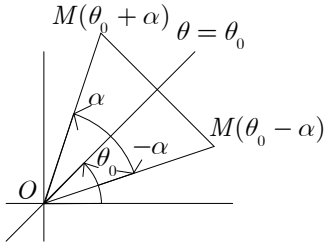
**b) symétries**

Soit $\theta_0\in\mathbb{R}$ tel que $I$ soit symétrique par rapport à $\theta_0$.

Si $\rho(2\theta_0-\theta)=\rho(\theta)$ alors $\rho(\theta_0+\alpha)=\rho(\theta_0-\alpha)$

Le point $M(\theta_0+\alpha)$ est le symétrique de $M(\theta_0-\alpha)$ par rapport à la droite d'équation polaire $\theta=\theta_0$.

Si $\rho(2\theta_0-\alpha)=-\rho(\theta_0+\alpha)$, le point $M(\theta_0+\alpha)$ est le symétrique de $M(\theta_0-\alpha)$ par rapport à la droite d'équation polaire $\theta=\theta_0+\pi/2$.




Dans les deux cas, on peut alors limiter l'étude de l'arc à $I\cap[\theta_0,+\infty[$ ou $I\cap]-\infty,\theta_0]$.

On complète ensuite la courbe obtenue par la symétrie considérée.

*En particulier :* ($\theta_0=0$)

Si $\rho$ est paire alors la courbe est symétrique par rapport à l'axe $(Ox)$.

Si $\rho$ est impaire alors la courbe est symétrique par rapport à l'axe $(Oy)$.

### 4°) Etude de courbes définies par une équation polaire

#### a) schéma d'étude

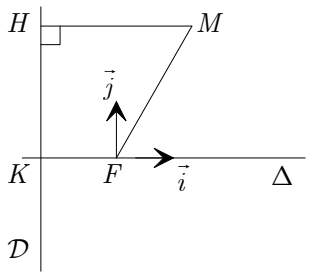
Pour étudier une courbe définie par un équation polaire $\rho = \rho(\theta)$ .

- on cherche l'intervalle (ou les intervalles) de définition de $\theta \mapsto \rho(\theta)$ et on précise la régularité la fonction,
- on cherche d'éventuelles symétries et/ou périodicité afin de réduire le domaine d'étude,
- on dresse le tableau de variation de $\theta \mapsto \rho(\theta)$ ,
- on précise les passages par l'origine ( $\rho(\theta) = 0$ ) avec allure du point,
- on précise les points de tangente orthoradiale ( $\rho'(\theta) = 0$ , $\rho(\theta) \neq 0$ ) avec allure,
- on étudie les éventuelles branches infinies avec allure,
- on représente la courbe après avoir éventuellement dresser une ébauche et complété l'étude par la précision d'autres points,

## V. Coniques

### 1°) Définition monofocale d'une conique

Soit $\mathcal{D}$ une droite du plan $\mathcal{P}$ , $F$ un point hors de $\mathcal{D}$ et $e > 0$ .
On étudie la courbe $\Gamma$ formée des points $M$ du plan tels que $MF = e.d(M,\mathcal{D})$ .




*Déf :* $\Gamma$ est appelée conique de foyer $F$ ,
de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité $e$ .

Soit $K$ le projeté orthogonal de $F$ sur $\mathcal{D}$ et $\Delta = (FK)$ .

*Déf :* $\Delta$ est appelé axe focal de la conique $\Gamma$ .

*Prop :* $\Gamma$ est symétrique par rapport à $\Delta$ .

*Déf :* $p$ est appelé paramètre de la conique $\Gamma$ .

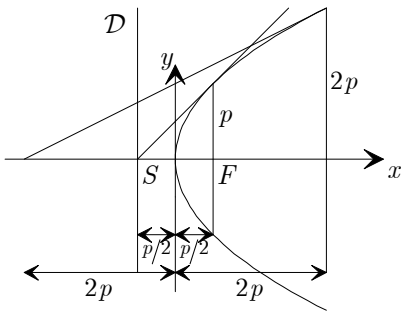
Soit $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{KF}}{KF}$ et $\vec{j}$ unitaire, orthogonal à $\vec{i}$ . $\mathcal{R}_F = (F;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé de $\mathcal{P}$ .

Dans $\mathcal{R}_F$ : $F\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$ et $\mathcal{D} : x = -\dfrac{p}{e}$ . Pour $M\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ : $M \in \Gamma \Leftrightarrow MF^2 = e^2 d(M,\mathcal{D})^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (ex+p)^2$

Ainsi, dans $\mathcal{R}_F$ , on a $\Gamma : x^2 + y^2 = (ex+p)^2$ . Pour poursuivre, on va distinguer 3 cas :
Si $e = 1$ , on dit que $\Gamma$ est une parabole.
Si $0 < e < 1$ , on dit que $\Gamma$ est une ellipse.
Si $e > 1$ , on dit que $\Gamma$ est une hyperbole.

### 2°) Etude de la parabole

On reprend les notations ci-dessus avec $e = 1$ .
Considérons $S$ le milieu du segment $[F,K]$ .




Dans le repère $\mathcal{R}_S = (S;\vec{i},\vec{j})$ . On a : $\Gamma : y^2 = 2px$ .

*Déf :* L'équation $y^2 = 2px$ est appelée
équation réduite de la parabole $\Gamma$ .

*Déf :* $S$ est appelé sommet de la parabole $\Gamma$ .

Positionnement de $F$ et $\mathcal{D}$ : $F\begin{vmatrix}p/2\\0\end{vmatrix}$ et $K\begin{vmatrix}-p/2\\0\end{vmatrix}$ .

Pour $t = 1/2$ , $M(1)\begin{vmatrix}p/2\\p\end{vmatrix}$ . L'intersection de $\Gamma$ et de la droite d'équation $y = 2x$ permet de positionner $F$ et $\mathcal{D}$ .

*Prop :* En tout point $M\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix} \in \Gamma$ , $\Gamma$ admet une tangente d'équation : $yy_0 = p(x + x_0)$ .

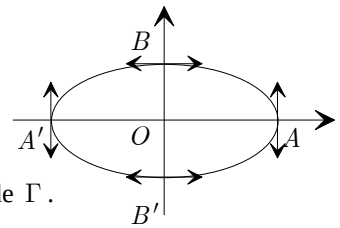
### 3°) Etude de l'ellipse

On reprend les notations du 1°) avec $0<e<1$.

**a) équation réduite**

Il existe un point $O$ appartenant à la demie droite d'origine $O$ dirigée par $\vec{i}$ telle que $\mathcal{R}_O=(O;\vec{i},\vec{j})$,

$\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ avec $a=\dfrac{p}{1-e^2}$ et $b=\dfrac{p}{\sqrt{1-e^2}}=\sqrt{1-e^2}a$ $(<a)$.




*Déf :* L'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ est appelée équation réduite de l'ellipse $\Gamma$.

*Prop :* $(Ox)$ et $(Oy)$ sont axes de symétries de $\Gamma$. $O$ est centre de symétrie de $\Gamma$.

*Déf :* On dit que $O$ est le centre de l'ellipse $\Gamma$ et on dit aussi qu'une ellipse est une conique à centre.

*Déf :* Ces points sont appelés sommets de l'ellipse $\Gamma$.

*Déf :* Les segments $[A',A]$ et $[B',B]$ sont respectivement appelés grand axe et petit axe de l'ellipse $\Gamma$.
Les longueurs $a$ et $b$ sont respectivement appelés demi-grand axe et demi-petit axe de l'ellipse $\Gamma$.

*Prop :* En tout point $M\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix}\in\Gamma$, $\Gamma$ admet une tangente d'équation : $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$.

*Prop :* L'ellipse $\Gamma$ est l'image du cercle $\mathcal{C}=\mathcal{C}(O,a)$ par la transformation : $M\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}\mapsto M'\begin{vmatrix}x\\by/a\end{vmatrix}$

**b) positionnement de F et D**

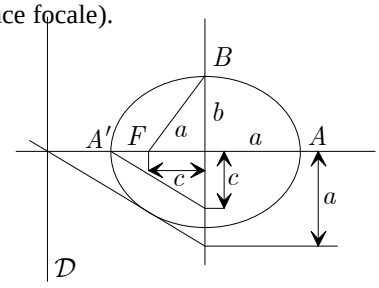
Pour positionner $F$ introduisons $c=OF=\dfrac{pe}{1-e^2}=ae$ (appelé demi-distance focale).

On a $b^2+c^2=\dfrac{p^2}{1-e^2}+\dfrac{p^2e^2}{(1-e^2)^2}=a^2$.

Par suite le triangle rectangle $(OBF)$ a pour hypoténuse $BF=a=OA$.
Ceci permet de positionner $F$.

La droite $\mathcal{D}$ a donc pour équation : $x=-\dfrac{a^2}{c}$.

On positionne $\mathcal{D}$ en exploitant Thalès.




**c) définition bifocale**

$\Gamma$ est symétrique par rapport à $(Oy)$. Notons $F'$ et $\mathcal{D}'$ les symétriques de $F$ et $\mathcal{D}$ par rapport à $(Oy)$.

*Prop :* $\Gamma$ est encore l'ellipse de foyer $F'$, de directrice $\mathcal{D}'$ et d'excentricité $e$.

*Théorème :*

Pour $M\in\mathcal{P}$ on a : $M\in\Gamma\Leftrightarrow MF+MF'=2a$.

*Déf :* L'équation $MF+MF'=2a$ est appelée définition bifocale de l'ellipse $\Gamma$.

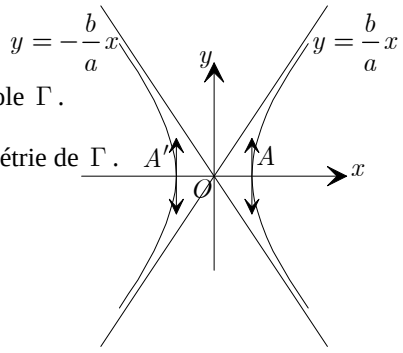
### 4°) Etude de l'hyperbole

On reprend les notations du 1°) avec $e>1$.

**a) équation réduite**

Il existe un point $O$ situé sur $\Delta$ au delà de $K$ par rapport à $F$ tel que dans $\mathcal{R}_0=(O;\vec{i},\vec{j})$,

$\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ avec $a=\dfrac{p}{1-e^2}$ et $b=\dfrac{p}{\sqrt{e^2-1}}$.




*Déf :* L'équation $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ est appelée équation réduite de l'hyperbole $\Gamma$.

*Prop :* $(Ox)$ et $(Oy)$ sont axes de symétries de $\Gamma$. $O$ est centre de symétrie de $\Gamma$.

*Déf :* On dit que $O$ est le centre de l'hyperbole $\Gamma$.
On dit encore qu'une hyperbole est une conique à centre.

*Déf :* Les points $A$ et $A'$ sont appelés sommets de l'hyperbole $\Gamma$.

*Déf :* $a$ est appelé demi-axe focal.

*Déf :* Les droites d'équations $y=\frac{b}{a}x$ et $y=-\frac{b}{a}x$ sont asymptotes à l'hyperbole $\Gamma$.

*Prop :* En tout point $M\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix}\in\Gamma$, $\Gamma$ admet une tangente d'équation : $\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$.

**b) positionnement de F et D**

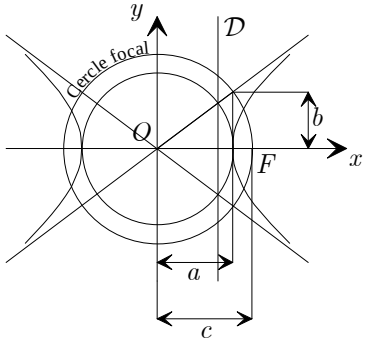
Pour positionner $F$ introduisons $c=OF=\frac{pe}{e^2-1}=ae$ (appelé demi-distance focale).

On a $a^2+b^2=\frac{p^2}{(e^2-1)^2}+\frac{p^2}{e^2-1}=c^2$.

$c=OF$ apparaît comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés $a$ et $b$. Ceci permet de positionner $F$.

La droite $\mathcal{D}$ a donc pour équation : $x=\frac{a^2}{c}$.

On positionne $\mathcal{D}$ en exploitant Thalès.




**c) définition bifocale**

$\Gamma$ est symétrique par rapport à $(Oy)$.

Notons $F'$ et $\mathcal{D}'$ les symétriques de $F$ et $\mathcal{D}$ par rapport à $(Oy)$.

*Prop :* $\Gamma$ est aussi l'hyperbole de foyer de $F'$ de directrice $\mathcal{D}'$ et d'excentricité $e$.

*Théorème :*

Pour $M\in\mathcal{P}$ on a :

$M\in\Gamma\Leftrightarrow\left|MF-MF'\right|=2a$.

*Déf :* L'équation $\left|MF-MF'\right|=2a$ est appelée définition bifocale de l'hyperbole.

**d) hyperbole équilatère**

*Prop :* Les asymptotes d'une hyperbole sont orthogonales ssi $e=\sqrt{2}$.

*Déf :* Une telle hyperbole est dite équilatère.

## 5°) Equation polaire d'une conique

On suppose le plan muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j})$.

*Théorème :*

$\rho=\frac{p}{1+e\cos(\theta-\alpha)}$ est équation polaire de la conique $\Gamma$ de foyer $O$, d'axe focal $\theta=\alpha$ et de directrice $\mathcal{D}$ d'équation polaire $\rho=\frac{p}{e\cos(\theta-\alpha)}$.

*Prop :* $\rho=\frac{p}{\cos(\theta-\theta_0)+e\cos(\theta-\alpha)}$ est l'équation polaire de la tangente à $\Gamma$ au point de paramètre $\theta_0$.

## 6°) Réduction de courbes du second degré.

On suppose le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j})$.

*Déf :* On appelle courbe du second degré toute courbe $\Gamma$ d'équation :

$\alpha.x^2+\beta.xy+\gamma.y^2+\xi.x+\psi.y=\kappa$ avec $(\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)$.

On appelle discriminant de cette courbe le réel $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$

Si $\Delta<0$ alors il existe un repère orthonormé $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$ tel que l'équation de $\Gamma$ y soit de la forme $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\varepsilon$ avec $a,b>0$ et $\varepsilon=1,0,-1$.

Quand $\varepsilon=-1$, $\Gamma=\varnothing$, quand $\varepsilon=0$, $\Gamma=\{\Omega\}$ et quand $\varepsilon=1$, $\Gamma$ est un cercle de centre $\Omega$ (si $a=b$) ou une ellipse de centre $\Omega$ et d'axe focal $(\Omega;\vec{u})$ (si $a>b$) ou $(\Omega;\vec{v})$ (si $a<b$).

Si $\Delta>0$ alors il existe un repère orthonormé $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$ tel que l'équation de $\Gamma$ y soit de la forme $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\varepsilon$ avec $a,b>0$ et $\varepsilon=1,0,-1$.
Quand $\varepsilon=0$, $\Gamma$ est la réunion de droites sécantes en $O$ et sinon, $\Gamma$ est une hyperbole de centre $\Omega$ et d'axe $(\Omega;\vec{u})$ (si $\varepsilon=1$) ou d'axe $(\Omega;\vec{v})$ (si $\varepsilon=-1$).
Si $\Delta=0$ alors il existe un repère orthonormé $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$ tel que l'équation de $\Gamma$ y soit de la forme $y^2=2px$ avec $p>0$ (parabole de sommet $\Omega$ d'axe focal $(\Omega;\vec{u})$) ou de la forme $y^2=q$ avec $q\in\mathbb{R}$ ($\Gamma$ est alors vide ou la réunion de droites parallèles, éventuellement confondues).